NIVELAMENTO PARA LEGO II → SOLUÇÕES DE LISTA

PARTE 1: ESPERANÇA ESTATÍSTICA E PROPRIEDADES DO SOMATÓRIO

①

a) $\mathbb{E}[aX] = a\,\mathbb{E}[X]$

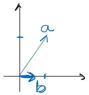
$$= \sum_{i=1}^{N} a f_i x_i = a \underbrace{\sum_{i=1}^{N} f_i x_i}_{\mathbb{E}[X]} = a\,\mathbb{E}[X]_{//}$$

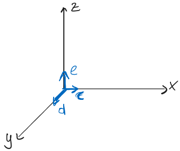
b) $\mathbb{E}[a] = a$

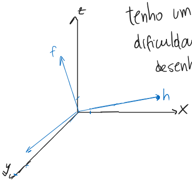
$$= \sum_{i=1}^{N} f_i a = a \underbrace{\sum_{i=1}^{N} f_i}_{\text{soma de frequências relativas}} = a \cdot 1 = a_{//}$$

PARTE 2: ÁLGEBRA LINEAR

②







tenho uma certa dificuldade de desenhar vetores em 3D 😦

③ Só podemos preencher o $\mathbb{R}^3$ com 3 vetores. Pois vetores compõem, no máximo, um plano, caso sejam linearmente independentes.

a) $\underset{u}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}$ e $\underset{v}{\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}}$ reta, pois $3u = v$

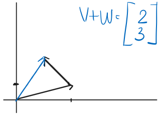
b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ plano

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ preenche todo o $\mathbb{R}^3$

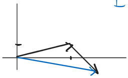
d) $\underset{o}{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}\underset{v}{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}\underset{w}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$ plano, pois $w = \frac{1}{2}(u+v)$

④ $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$v + w = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$



$v - w = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$



⑤ MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

a) AB, sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 2(0) + (-1)(1) + 7 \cdot 3 & 2(1) + (-1)(8) & 2(6) \\ 5(1) & -4(1) + 5(8) & -4(6) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & -6 & 12 \\ 5 & 36 & -24 \end{bmatrix}_{//}$$

b) BA existe? Vejamos...

$B_{3\times\underline{\underline{3}}}\ A_{\underline{\underline{2}}\times 3}$

NÃO! só podemos multiplicar matrizes se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda.

⑥ DEMONSTRAR QUE X^TX É SIMÉTRICA.

Uma matriz A é simétrica se $A = A^T$.

HIPÓTESE: X^TX é simétrica

se isso for verdade, $X^TX = (X^TX)^T$

$(X^TX)^T = (X)^T(X^T)^T = \underline{X^TX}$. De fato, X^TX é simétrica.

⑦ $u = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $w = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$

a) $u \cdot v = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = 3(-0.6) + (4)\cdot 0.8 = -1.8 + 3.2$
$= 1.4_{//}$

$u \cdot w = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 6 \end{bmatrix} = 8(-0.6) + 6(0.8) = -4.8 + 4.8$
$= 0_{//}$

$u(v+w) = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 10 \end{bmatrix} = -6.6 + 8 = 1.4_{//}$

b) $\|u\| = \sqrt{(-0.6)^2 + (0.8)^2} = \sqrt{0.36 + 0.64} = \sqrt{1} = 1_{//}$

$\|v\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5_{//}$

$\|w\| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10_{//}$

c) u já é unitário

$\frac{v}{\|v\|} = \frac{\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}}{5} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$ $\frac{w}{\|w\|} = \frac{\begin{bmatrix} 8 & 6 \end{bmatrix}}{10} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$

d) A correlação é o cosseno! 🙂

u e v $\Rightarrow$ $\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{1.4}{5} = 0.28$

W e V $\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{w \cdot v}{\|w\| \cdot \|v\|} = \dfrac{48}{50} = 0.96$

⑧ SOLUÇÃO DE SISTEMAS POR BACK-SUBSTITUTION

a) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \Rightarrow y_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_1 + y_2 = 4 \Rightarrow y_2 = 3 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 9 \Rightarrow y_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

⑨ Usando Gauss-Jordan, vamos achar inversas.

a) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{0 \quad -1 \quad 1}_{} \end{array}\right]$$

b) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ ora, essa é a mesma matriz que obtivemos acima. Sabemos que $(A^{-1})^{-1} = A$, então a inversa dessa matriz é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1/2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 - 1/2 L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 + L_3]{L_3 \cdot (-1/2)}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & +1/4 & 1/4 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 - 1/2 L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{1/4 \quad 1/4 \quad -1/2}_{} \end{array}\right] //$$

⑩ Por que $\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$ não tem inversa?

As colunas da matriz são lineramente dependentes.
Em particular, $\boxed{c_1 + c_3 = 2c_2}$

PARTE 3: CÁLCULO

⑪ Domínios de funções

a) $f(x) = x^3$ $\mathbb{R}$

b) $\frac{x-1}{x-3}$ $\mathbb{R} \setminus \{3\} \sim x \neq 3$

c) $f(x) = \ln x$ $\mathbb{R}^+$
↓ só positivos

d) $f(x) = \sqrt{\underbrace{x^2-4}_{\text{não negativo}}}$ $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

⑫ EQUAÇÃO DA RETA QUE PASSA POR (1,2) e (3,1)

$f(x) = \alpha + \beta x$

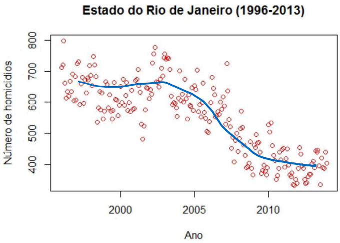
$$\begin{cases} \alpha + \beta \cdot 1 = 2 \Rightarrow \beta = 2 - \alpha \\ \alpha + \beta \cdot 3 = 1 \Rightarrow \alpha + 3(2-\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha + 6 - 3\alpha = 1 \end{cases}$$

$2\alpha = 5 \Rightarrow \alpha = 5/2$

$\beta = 2 - 5/2 \Rightarrow \beta = -1/2$

$f(x) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x$

⑬



Algo como a curva ao lado

$\boxed{14}$ LIMITES

a) $$\lim_{x\to 5}(x^2+2x-1) = 5^2+2(5)-1 = 25+10-1$$
$$= 34$$

b) $$\lim_{t\to 0^+}\frac{t+2}{\underbrace{(t-2)^2}_{\text{a função é contínua em } t=0}} = \frac{0+2}{(0-2)^2} = \frac{2}{4} = 1/2_{\,/\!/}$$

c) $$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x}{1+\boxed{1/x}} = -\infty_{\,/\!/}$$

↘ vai fazer cada vez menos diferença

$\boxed{15}$ DERIVADAS

a) $$\frac{d}{dx}(x^2+2x-1) = 2x+2_{\,/\!/}$$

b) $$\frac{d}{dx}4x^3 = 12x^2$$

c) $$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = \frac{d}{dx}(x)^{-1} = -x^{-2}$$
$$= -\frac{1}{x^2}$$

d) $$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2} = \frac{d}{dx}x^{-2} = -2x^{-3}$$
$$= -\frac{2}{x^3}$$

$\boxed{16}$ MÍNIMO DA FUNÇÃO $f(x)$ $1-3x+4x^2$

$$\frac{df}{dx} = 8x-3 \Rightarrow 8x-3=0 \Rightarrow 8x=3$$
$$\Rightarrow x = 3/8$$

Chegamos ao mínimo (derivada zero) em $x=3/8$

$$f(3/8) = 1-3\left(\frac{3}{8}\right)+4\left(\frac{3}{8}\right)^2 =$$

$$= 1-\frac{9}{8}+4\left(\frac{9}{64}\right) = \underset{1/16}{1} - \frac{9}{8_{/2}} + \frac{9}{16_{/1}} = \frac{16-18+9}{16} = \frac{7}{16}_{\,/\!/}$$

Teste da segunda derivada: $\frac{d^2f}{dx} = 8$ (mínimo, de fato)